3.1) Para que sea A. lineal, pruebo que:

① $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$

② $\phi(\lambda v) = \lambda . \phi(v)$

Tengo que $\phi(v) = (v, v_0)$

① $\phi(v) = (v, v_0)$

$\phi(w) = (w, v_0)$

$\phi(v+w) = (v+w, v_0) \rightarrow$ Por prop: $(x+y, z) = (x,z)+(y,z) \rightarrow$

$\rightarrow = (v, v_0) + (w, v_0) = \phi(v) + \phi(w)$ ✓

② $\phi(v) = (v, v_0)$

$\phi(\lambda v) = (\lambda v, v_0) \rightarrow$ Por prop: $(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \longleftrightarrow$

$\rightarrow = \lambda . (v, v_0) = \lambda . \phi(v)$ ✓

Cumple los dos axiomas $\rightarrow$ es A. lineal. ✓

Busco núcleo:

$Nu(\phi(v)) = \{v \in \mathbb{V} : (v, v_0) = 0\}$

$(v, v_0) = 0$, $v_0 \neq 0$

Como gen$\{v_0\}$ tiene dimensión 1

y los v que cumplan la ecuación serán todos los vectores ortogonales a v_0 y el núcleo tendrá entonces

$\dim(Nu(\phi)) = n-1$, siendo $\dim(\mathbb{V}) = n$.

Por lo tanto $\dim(Nu(\phi)) + \dim(\text{gen}\{v_0\}) = \dim(\mathbb{V})$

y como $Nu(\phi) \subseteq \mathbb{V}$ y gen$\{v_0\} \subseteq \mathbb{V}$

$\rightarrow$ $Nu(\phi) + \text{gen}\{v_0\} = \mathbb{V}$.

Como además v_0 no está en el núcleo ya que $v_0 \neq 0$

y por prop. de PI $(x, x) = 0 \iff x = 0$, entonces:

$Nu(\phi) \cap \text{gen}\{v_0\} = \{0\}$

y por lo tanto:

$Nu(\phi) \oplus \text{gen}\{v_0\} = \mathbb{V}$

b) $\phi(v) = \langle v_0, v \rangle$

Pruebo ① y ② como en a)

① $\phi(v) = \langle v_0, v \rangle$, $\phi(w) = (v_0, w)$

$\phi(v+w) = \langle v_0, v+w \rangle \rightarrow$ Por prop. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \longrightarrow$

$\rightarrow = \overline{\langle v+w, v_0 \rangle} \rightarrow$ Por prop. $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \longrightarrow$

$\rightarrow = \overline{\langle v, v_0 \rangle} + \overline{\langle w, v_0 \rangle} \rightarrow$ Por prop. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \longrightarrow$

$\rightarrow = \langle v_0, v \rangle + \langle v_0, w \rangle = \phi(v) + \phi(w)$ ✓

② $\phi(v) = \langle v_0, v \rangle$

$\phi(\lambda v) = \langle v_0, \lambda v \rangle \rightarrow$ Por prop. $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle \longrightarrow$

$\rightarrow = \bar{\lambda} \langle v_0, v \rangle \neq \lambda \cdot \langle v_0, v \rangle$ ya que $\lambda \in \mathbb{C}$

Como no se cumple el axioma ② $\rightarrow$ No es f. lineal.